

ANÁLISIS NUMÉRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS UNIDIMENSIONALES APLICADOS EN BIOLOGÍA

***NUMERICAL ANALYSIS OF ONE-DIMENSIONAL MATHEMATICAL
MODELS APPLIED IN BIOLOGY***

Recibido: 30/03/2021 - Aceptado: 24/01/2022

JOHNNY FERNANDO HIDALGO RODRÍGUEZ

Docente de la Universidad Politécnica Estatal del Carchi
Tulcán - Ecuador

Máster en Ingeniería Matemática y Computación
Universidad Internacional de la Rioja - UNIR

johnny.hidalgo@upec.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0001-8436-7843>

Cómo citar este artículo:

Hidalgo, J. (Enero - Junio de 2021). Análisis numérico de modelos matemáticos unidimensionales aplicados en biología. *Sathiri* (17)1, 339-373. <https://doi.org/10.32645/13906925.1118>

Resumen

El presente trabajo de investigación tiene como propósito dar a conocer los principales modelos matemáticos unidimensionales aplicados en Dinámica de Poblaciones en lo concerniente al área de la biología (crecimiento de individuos y poblaciones). Estos modelos los cuales son lineales y no lineales, utilizan ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales para describir de mejor forma los fenómenos biológicos. El objetivo principal de este estudio fue la aplicación de Métodos Numéricos de un paso (Heun y Runge-Kutta) y multipasos (Adams-Basforth y Adams-Moulton) para la resolución de problemas de valor inicial, a los modelos matemáticos unidimensionales propuestos, con el fin de realizar comparaciones y determinar qué Método Numérico fue el que mejor se ajustó a la solución analítica de cada Modelo Matemático; para esto, como herramienta informática de apoyo para la representación de los datos y su forma gráfica, se utilizó el programa MATLAB, el cual es un sistema de cómputo numérico que ofrece un entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio. Se obtuvieron los resultados de la aplicación de cada método numérico a la solución analítica de los diferentes modelos matemáticos en estudio; posteriormente se representaron, graficaron e interpretaron estos resultados y, de toda la información y resultados obtenidos se concluyó que es el método de Runge-Kutta de orden 4 el que mejor se ajustó o aproximó a la solución analítica de cada uno de los cinco modelos; seguido del método de Adams-Basforth de orden 4, el cual sólo presentó problemas al aplicarlo sobre el modelo de Gompertz, presentando un comportamiento inestable en los datos obtenidos. El método que menos se ajustó en todos los modelos es el de Heun de orden dos; el método de Adams-Moulton de orden 4 presentó

Palabras claves: Modelos Matemáticos, Métodos Numéricos, Dinámica de las Poblaciones, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Problemas de Valor Inicial.

Abstract

The present research work has as purpose to present the main one-dimensional mathematical models that have been applied in Population Dynamics in relation to the area of biology (growth of individuals and populations). These models, which are linear and non-linear, use ordinary differential equations with initial conditions to better describe biological phenomena. The main objective of this study was the application of one-step (Heun and Runge-Kutta) and multistep (Adams-Basforth and Adams-Moulton) Numerical Methods for the resolution of initial value problems, to the proposed one-dimensional mathematical models, with The purpose of making comparisons and determining which Numerical Method was the one that best adjusted to the analytical solution of each Mathematical Model; For this, as a computer support tool for the representation of data and its graphic form, the MATLAB program was used, which is a numerical computing system that offers an integrated development environment with its own programming language. The results of the application of each numerical method to the analytical solution of the different mathematical models under study were obtained; Later, these results were represented, plotted and interpreted and, from all the information and results obtained, it was concluded that it is the Runge-Kutta method of order 4 that best adjusted or approximated the analytical solution of each of the five models; followed by the Adams-Basforth method of order 4, which only presented problems when applied to the Gompertz model, presenting an unstable behavior in the data obtained. The least adjusted method in all models is Heun's of order two; the Adams-Moulton method of order 4 presented an unstable behavior in the data obtained in all the chosen models.

Keywords: Mathematical Models, Numerical Methods, Population Dynamics, Ordinary Differential Equations, Initial Value Problems.

Introducción

“A lo largo de la historia, el hombre ha intentado hacer predicciones en diversas áreas, como la demografía, economía, química, biología, meteorología, entre otras ciencias” (Ortiz Laso, 2016). “En la actualidad los modelos matemáticos han ganado mayor importancia, debido a su relación con todas estas ciencias” (Ulloa Ibarra & Rodríguez Carrillo, 2010). Por esta razón, los modelos matemáticos nos son útiles para predecir fenómenos o para la toma de decisiones cuando son aplicados a varios fenómenos de las diferentes ciencias de estudio; cuando su aplicación e interpretación son correctas, estos son de gran ayuda y nos pueden evitar grandes costos. “Los primeros modelos matemáticos aplicados en biología han sido quizás los modelos que intentan describir la dinámica de poblaciones” (Ditz, 2015). “Los modelos matemáticos contribuyen al manejo y esclarecimiento de la dinámica de las poblaciones y revisten especial interés como herramientas predictivas en las especies” (Barranco y otros, 1999). “La palabra dinámica nos lleva, desde el punto de vista de la matemática, a considerar la derivada como tasa de cambio instantánea” (Jiménez, 1997).

El concepto de derivada puede ser introducido con la ayuda de la física, pasando de “velocidad promedio” a “velocidad instantánea”, de manera un tanto intuitiva. Ante la necesidad de ajustar un modelo de forma óptima a un conjunto de datos, es mejor seleccionarlo a partir de un grupo de modelos candidatos (incluidos con base a las características de la especie bajo estudio) en lugar de asumir que existe el mejor modelo y usarlo ajustándolo a los datos. (Aragón-Noriega, 2012)

Es por todo esto que el presente estudio tomó como referencia los trabajos realizados por los autores (Espinosa Herrera y otros, 2010) de la Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Azcapotzalco de la Ciudad de México, quienes presentaron una investigación basada en el estudio de las ecuaciones diferenciales y desarrollaron algunas aplicaciones del modelo de Malthus y de Verhulst. El estudio presentado por (Hidalgo de la Toba, 2015) sobre el crecimiento individual de la Almeja Panoepa Generosa y la aplicación de la teoría de modelos múltiples, quien utilizó entre algunos modelos, el de crecimiento de Gompertz en su investigación. El estudio de los autores (González y otros, Enero - Junio 2019) el cual se basó en un análisis multimodelo del crecimiento de *Pseudoplatystoma orinocoense* en la cuenca media del Orinoco, Venezuela, y entre esos modelos que utilizaron aparece Von Bertalanffy. Finalmente, el estudio presentado por los investigadores (Malhado y otros, 2008) quienes analizaron modelos no lineales para lograr predecir el crecimiento de bufalinos de la raza Murrah y entre estos se destaca el modelo de Brody.

Sin embargo, en ninguno de estos trabajos se incluyó un análisis posterior basado en la aplicación de métodos numéricos a los resultados obtenidos en la utilización de estos modelos matemáticos en cada uno de los estudios en mención; análisis que permitió observar y determinar el método de mejor ajuste a la solución analítica de cada modelo. Por ello, la presente investigación aportó como complemento a cualquiera de estos estudios donde se aplicó un análisis multimodelo de crecimiento tanto en talla como en peso de una determinada especie en lo referente a la dinámica de las poblaciones.

Modelos matemáticos

De forma general, de acuerdo a (Parra y otros, 2019), “un modelo matemático es un conjunto de ecuaciones que describe las relaciones entre un conjunto de objetos que conforman un sistema”. Resolviendo estas ecuaciones podemos imitar o simular el comportamiento del sistema. En (San Cristóbal Mateo, 2004) se indica que “un modelo matemático es una ecuación o un conjunto de

ecuaciones que describen un fenómeno de cualquier índole". Sus soluciones se aproximarán a la realidad del fenómeno en estudio con cierto margen de error, dependiendo de los parámetros de cada modelo. Además, en (Ladino Martínez, 2012) se afirma que "la posibilidad de modelar matemáticamente un sistema tiene su importancia en poder predecir con determinado acierto el comportamiento futuro de éste, en circunstancias que no pueden o son difíciles de ser reproducidas en un laboratorio". Finalmente, en (Ulloa Ibarra y otros, 2013) se concluye que:

En la actualidad los modelos matemáticos han ganado mayor importancia, debido a su relación con todas las ciencias. Por esta razón los modelos matemáticos nos son útiles para predecir fenómenos o para la toma de decisiones cuando son aplicados a varios fenómenos de las diferentes ciencias de estudio; cuando su aplicación e interpretación son correctas, estos son de gran ayuda y nos pueden evitar grandes costos.

Dinámica de las poblaciones (Modelos de crecimiento):

Según (Csirke B., 1989):

La dinámica de las poblaciones es el estudio de la vida del ente o unidad viviente que denominamos población. Es una rama de la biología que, con el auxilio de otras ciencias, principalmente de las matemáticas, trata de describir y cuantificar los cambios que continuamente ocurren en la población.

En cambio (Ditz, 2015) afirma que:

Los primeros modelos matemáticos aplicados en Biología han sido quizás los modelos que intentan describir la dinámica de poblaciones. Para saber cómo evoluciona una determinada población es necesario conocer o suponer cómo varía el número de efectivos de dicha población (ecuación diferencial) y tener datos del número de individuos que componen dicha población en un instante determinado (condiciones iniciales).

Modelos matemáticos unidimensionales aplicados en biología:

El estudio matemático de los cambios en poblaciones tiene una historia muy amplia. Es imposible afirmar cuál fue el primer modelo matemático formulado para la dinámica de una población, sin embargo, en el presente trabajo estudiaremos aquellos modelos unidimensionales de crecimiento aplicados en la dinámica de las poblaciones en la rama de la Biología, empezando por el de Malthus o modelo exponencial, seguido de Verhulst o modelo logístico, Gompertz, Von Bertalanffy y finalizaremos con el modelo de Brody. Todos estos modelos lineales y no lineales utilizan Ecuaciones o Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's) con condiciones iniciales para su aplicación; los estudiaremos con más detalle a continuación.

Modelo de malthus o modelo exponencial:

De acuerdo a (May Cen, 2016):

Uno de los primeros modelos matemáticos aplicados al crecimiento poblacional es el que en el año de 1798 el economista inglés Thomas Malthus desarrolló. La idea básica del modelo es la suposición de que la velocidad a la que crece la población es proporcional al tamaño de la misma.

“El modelo de crecimiento de Malthus (también denominado modelo de crecimiento exponencial) está formulado a través de un problema de valor inicial (PVI) basado en una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden lineal homogéneo a coeficientes constantes” (Cortés López y otros, 2013).

$$\left. \begin{aligned} p'(t) &= \alpha p(t), & t > t_0 \geq 0 \\ p(t_0) &= p_0 \end{aligned} \right\}, \alpha \in \mathbb{R}, p_0 > 0$$

Según (Cortés López y otros, 2013) en este modelo las variables son:

$p(t)$: Población en el instante t .
 p_0 : Población inicial en el instante t_0 .
 α : Constante de crecimiento relativo de la población.

Además (Cortés López y otros, 2013) afirma que “en el modelo de Malthus la población es más grande, cuando el número de especies u organismos sea mayor. La constante α , puede ser positiva o negativa, y esta indica cuando una población crece o decrece”.

Por un procedimiento sencillo, se puede llegar a la solución al modelo de Malthus:

$$p(t) = p_0 e^{\alpha t}$$

En la Figura 1, se representa un caso particular de (2) para $\alpha=0.28768207245$, en el que se puede visualizar el crecimiento de una población de bacterias, transcurrido cierto periodo de tiempo.

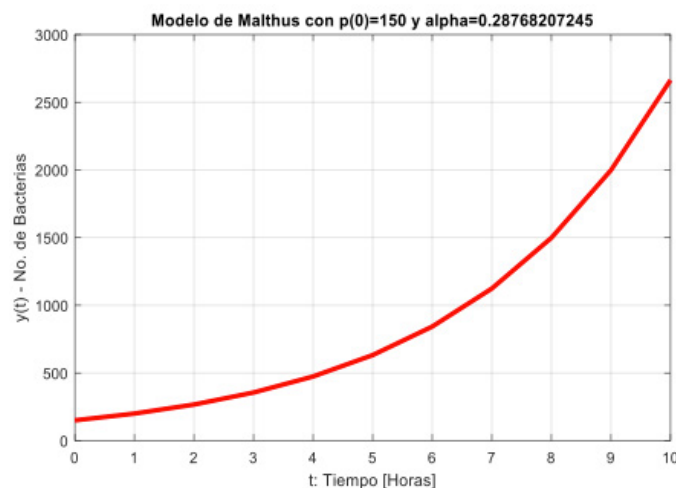


Figura 1. Representación gráfica de la solución del modelo de crecimiento exponencial de Malthus con parámetros: $\alpha=0.28768207245$ y $p_0=150$.

Modelo de Verhulst o Modelo logístico:

De acuerdo a (May Cen, 2016):

El modelo logístico es un refinamiento del modelo de Malthus. Cada vez que crece una especie, en algún momento este crecimiento se va a ver limitado por la escasez de recursos y otros factores que no permiten que una especie pueda crecer de forma exponencial.

De esta manera (Cortés López y otros, 2013) concluyen que “Verhulst consideró un término de freno no lineal y demostró que este modelo expresa mejor cómo evoluciona una especie”. El modelo resultante puede verse en (3).

$$p'(t) = r p(t) \left(1 - \frac{p(t)}{K}\right)$$

Donde:

$p(t)$: Población en el instante t .

r : Es la razón de crecimiento intrínseco.

K : Es la capacidad sustentable.

Por el método de separación de variables, se puede llegar a la solución al modelo de Verhulst:

$$p(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - p_0}{p_0}\right) e^{-rt}}$$

En la Figura 2, se representa un caso particular de (4) para $p(0)=K/4$, $r=0.71$ y $K=80.5 \cdot 10^6$ Kg de biomasa, en el que se puede visualizar el crecimiento de la biomasa de cierta especie, transcurrido cierto periodo.

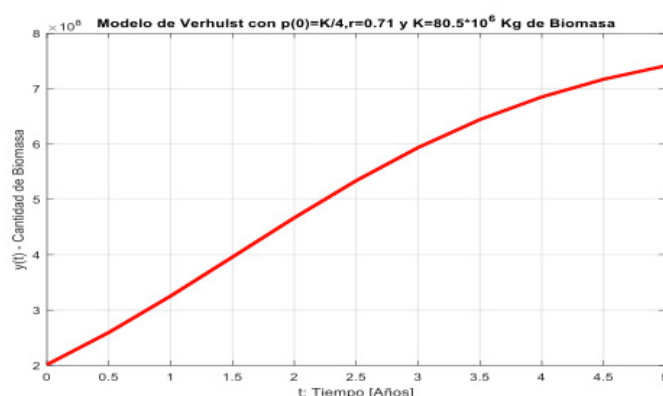


Figura 2. Representación gráfica de la solución del modelo logístico de Verhulst con parámetros: $p(0)=K/4$, $r=0.71$ y $K=80.5 \cdot 10^6$ Kg de Biomasa

Modelo de Gompertz:

Según (Cedron Castro, 2016):

Benjamín Gompertz, fue miembro de una distinguida familia judía de orígenes germanos y holandeses. Nació el 5 de marzo de 1779 en Londres, donde también murió el 14 de julio de 1865. Desde la adolescencia, Gompertz estaba familiarizado con los tratados de los matemáticos ingleses y franceses del siglo XVIII como Newton, Maclaurin o Emerson.

De acuerdo a (Trinidad Bello, 2014) la ecuación diferencial de Gompertz viene dada por la siguiente expresión:

$$p'(t) = Kp(t) \ln\left(\frac{A}{p(t)}\right)$$

Donde:

$p(t)$: Población en el instante t .
 A : Valor de crecimiento máximo de la población.
 K : Tasa de crecimiento intrínseco.

La tasa de crecimiento del modelo, representada como:

$$\text{Tasa de Crecimiento} = K \ln\left(\frac{A}{p(t)}\right)$$

Es de orden logarítmico. La ecuación diferencial de Gompertz se resuelve explícitamente y sus soluciones son:

$$p(t) = Ae^{-Be^{-Kt}}$$

Donde:

$p(t)$: Población en el instante t .
 A : Valor del máximo de crecimiento y además determina un punto de inflexión en A/e .
 B : Valor positivo que traslada al modelo a la izquierda o a la derecha $B=1/K$
 K : Tasa de crecimiento intrínseca.

En la Figura 3, se representa un caso particular de (7) para $L(0)=12.22, A=118.62$ y $K=0.44$, en el que se puede visualizar el crecimiento o longitud de cierta especie, transcurrido cierto periodo de tiempo.

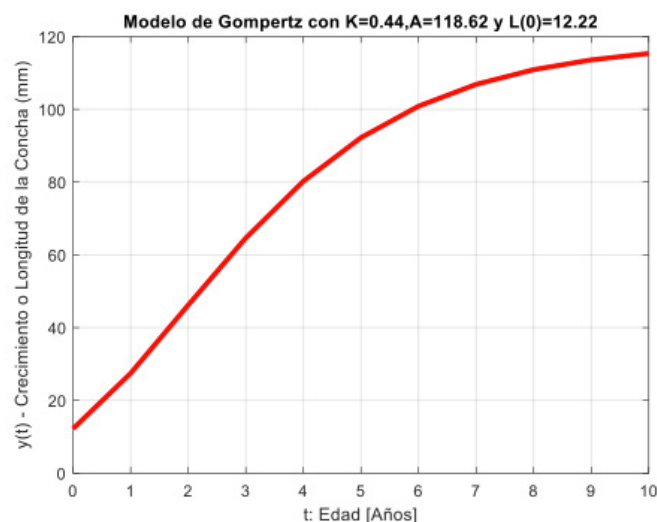


Figura 3. Representación grafica de la solución del modelo de Gompertz con parametros: $L(0)=12.22, A=118.62$ y $K=0.44$

Modelo de Von Bertalanffy:

De acuerdo a (Chiappa Carrara y otros, 2009):

Este modelo expresa como crecen las especies tanto en talla como en peso de forma individual. Su forma gráfica representa una curva en la cual la pendiente disminuye continuamente después de cierta edad, aproximándose a una asíntota superior paralela al eje de la x. En la actualidad este modelo es uno de los más utilizados por biólogos para los estudios de crecimiento en peces (alométrico e isométrico), así también en dinámica de poblaciones o para el control del efecto de la pesca en dichas poblaciones.

Según (Trinidad Bello, 2014) la ecuación diferencial de Von Bertalanffy viene dada por la siguiente expresión:

$$L'(t) = K(A - L(t))$$

Por el método de separación de variables, se puede llegar a la solución al modelo de Von Bertalanffy:

$$L(t) = A(1 - e^{-K(t-t_0)})$$

Donde:

$L(t)$: Longitud del individuo al tiempo t .

A : Longitud máxima del individuo (asíntota máxima).

K : Parámetro de curvatura que indica qué tan rápido la longitud alcanzan su valor máximo.

t : Tiempo.

t_0 : Valor teórico del tiempo en el cual la longitud es igual a cero.

En la Figura 4, se representa un caso particular de (9) para $L(0)=0, A=81.2$ y $K=0.386$, en el que se puede visualizar el crecimiento o longitud de cierta especie, transcurrido cierto periodo de tiempo.

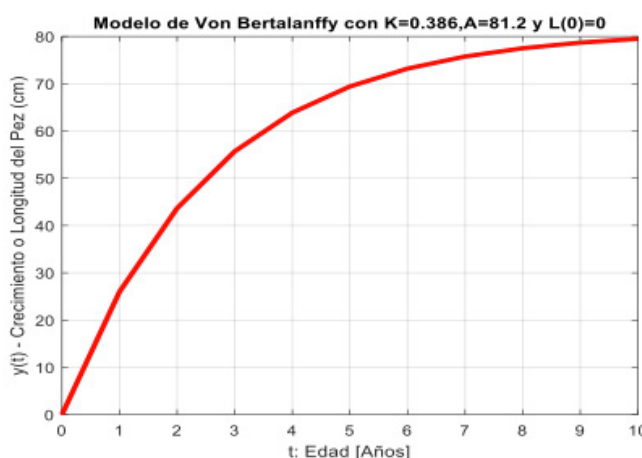


Figura 4. Representación gráfica de la solución del modelo de Von Bertalanffy con parámetros: $L(0)=0, A=81.2$ y $K=0.386$

Modelo de Brody:

Dentro del estudio de este modelo, podemos citar a (Ulloa Ibarra y otros, 2017) quienes manifiestan que “la representación del crecimiento requiere de la utilización de diferentes modelos, algunos de ellos lineales y otros que no lo son, como el caso de los modelos sigmoidales que permiten una buena representación de los procesos de crecimiento animal”. En cambio (Trinidad Bello, 2014) indica que, “en el modelo de Brody, su ecuación diferencial considera que la velocidad de crecimiento en peso es proporcional al crecimiento que falta para llegar al peso máximo, Brody extendió los trabajos desarrollados por Von Bertalanffy”.

De acuerdo a (Trinidad Bello, 2014) el modelo se representa por la siguiente ecuación diferencial:

$$P'(t) = K(A - P(t))$$

Según (Trinidad Bello, 2014) al resolver la ecuación diferencial anterior, se integra y se obtiene el modelo de Brody:

$$P(t) = A(1 - Be^{-Kt})$$

Donde:

$P(t)$: Representa el peso del animal en el tiempo t .

A : Crecimiento o peso máximo asintótico, cuando t tiende al infinito.

K : Índice de madurez.

B : Parámetro de ajuste, depende de la condición inicial en $t = 0$ y representa una proporción del peso máximo.

En la Figura 5, se representa un caso particular de (11) para $K=0.0011$, $A=688$ y $B=0.98$, en el que se puede visualizar el crecimiento en peso de cierta especie, transcurrido cierto periodo.

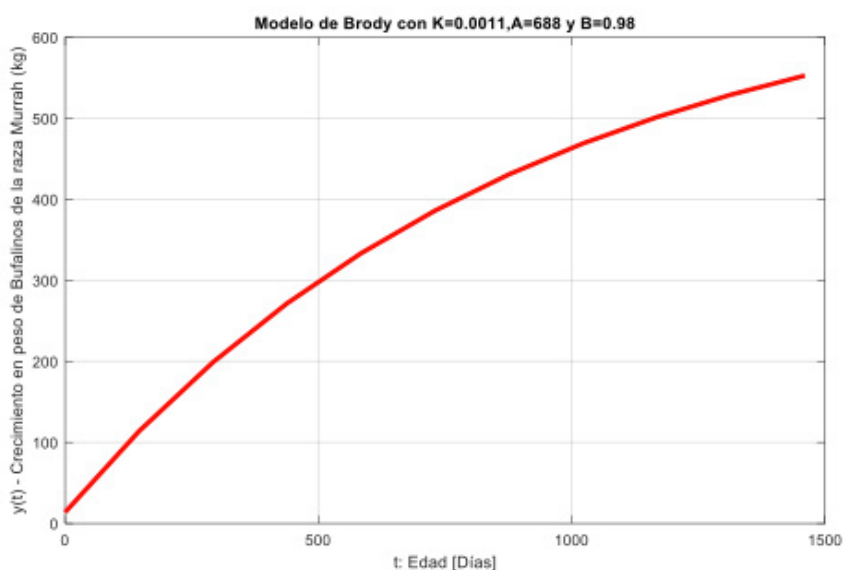


Figura 5. Representación gráfica de la solución del modelo de Brody con parámetros $K=0.0011$, $A=688$ y $B=0.98$

Métodos numéricos

De acuerdo a (Chapra & Canale, 2015):

Los métodos numéricos son técnicas a través de las cuales se puede formular problemas matemáticos, de tal manera que puedan resolverse usando operaciones aritméticas. Existen muchos tipos de métodos numéricos, los cuales comparten una característica común: requieren de un gran número de cálculos matemáticos. Con el desarrollo de computadoras digitales eficientes y rápidas, el papel de los métodos numéricos en la solución de problemas en ingeniería ha aumentado considerablemente en los últimos años. Proporcionan aumento en la potencia de cálculo, la disponibilidad creciente de las computadoras y su asociación con los métodos numéricos han influido de manera muy significativa en el proceso de la solución actual de los problemas en ingeniería.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO):

Según (Chapra & Canale, 2015) en (12), se representa un ejemplo sencillo de una EDO:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$$

“A este tipo de ecuaciones se las llama ecuaciones diferenciales, y las mismas tienen una función que no se conoce y sus derivadas” (Chapra & Canale, 2015). Estas ecuaciones son muy importantes en ingeniería, porque representan a los fenómenos físicos que luego pueden ser formulados matemáticamente. En (12), la variable que se deriva v , es llamada variable dependiente y la cantidad con respecto a la cual v se está derivando t , es llamada variable independiente. Si se observa que la función tiene solo una variable independiente, la ecuación diferencial es ordinaria o por sus siglas, EDO. “Este tipo de ecuaciones son diferentes a las ecuaciones diferenciales parciales o EDP donde existen dos o más variables independientes” (Chapra & Canale, 2015).

Estas ecuaciones son clasificadas de acuerdo a su orden; de esta forma (12) representa una EDO de primer orden, esto se debe a que su derivada mayor es una primera derivada; en cambio una EDO de segundo orden tiene una segunda derivada como la mayor. Por ejemplo (13), representa a una EDO de segundo orden:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Las EDO de orden superior pueden reducirse a un sistema de ecuaciones de primer orden.

Problema de Valor Inicial (PVI):

De acuerdo a (Burden & Faires, 2017) la ecuación (14) representa una EDO de segundo orden:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \text{Sen}\theta = 0$$

Si se escribe $\theta(t_0)=\theta_0$, y su derivada $\theta'(t_0)=\theta'_0$, entonces observamos lo que se conoce como problema de valor inicial.

Para los valores pequeños de θ , la aproximación $\theta \approx \text{Sen } \theta$ se puede utilizar para simplificar el problema de valor inicial lineal.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0, \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \theta'_0$$

Este problema se puede resolver con una técnica de ecuación diferencial estándar. Para los valores más grandes de θ , la suposición de que $\theta = \text{Sen } \theta$ no es razonable, por lo que deben usarse los métodos de aproximación.

Métodos numéricos para la resolución de Problemas de Valor Inicial (PVI):

En el presente estudio, se analizaron dos tipos de métodos numéricos, para resolver problemas de valor inicial. Los métodos de un paso: Heun y Runge-Kutta y los métodos de pasos múltiples: Adams-Basforth y Adams-Moulton.

Métodos de un paso: de acuerdo a (Chapra & Canale, 2015) estos métodos son los que permiten la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Aquellos métodos de un paso que son expresados de esta forma general, van a diferir en la manera en la que se estima la pendiente. Todas estas técnicas en general se conocen como métodos de Runge-Kutta.

Métodos Multipasos: según (Burden & Faires, 2017) “los métodos que utilizan la aproximación en más de un punto de malla previo para determinar la aproximación en el siguiente punto, reciben el nombre de métodos multipasos”. En cambio (Chapra & Canale, 2015) sostiene que “estos métodos mantienen datos de pasos anteriores para lograr obtener de forma mucho más efectiva la solución; además ofrecen la estimación del error de truncamiento que se utiliza para implementar el control adaptativo del tamaño de paso”.

Materiales y métodos

El tipo de investigación que se utilizó es cuantitativa, se recopilaron los datos obtenidos de los análisis multimodelo que se realizaron en cada uno de los estudios propuestos, los cuales se describieron en la parte introductoria. Para aplicar este tipo de investigación se utilizaron herramientas matemáticas e informáticas para medir estos datos

Se planteó en esta investigación la aplicación de cuatro métodos numéricos que resuelven ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con problemas de valor inicial, a cinco modelos matemáticos de crecimiento en lo que respecta a la dinámica de las poblaciones en el área de la Biología.

Para esto se tomaron en consideración investigaciones de otros autores que realizaron análisis multimodelo para estimar el crecimiento en talla o peso de varias especies marinas y/o terrestres; de estas investigaciones se tomaron los datos y los parámetros de cada modelo elegido y con la ayuda de la herramienta informática de cálculos MATLAB se aplicaron los cuatro métodos numéricos seleccionados, se obtuvieron los resultados numéricos y gráficos de cada aplicación

y realizando comparaciones, se determinó cuál de estos métodos numéricos es el que mejor se ajusta o aproxima a la solución analítica que tiene cada modelo.

Resultados y discusión

Aplicación de los métodos numéricos al modelo de Malthus

La solución analítica al modelo de Malthus es:

$$p(t) = p_0 e^{\alpha t}$$

Desarrollo matemático de la solución analítica:

Se inicia con la resolución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{aligned} p'(t) &= \alpha p(t) \\ \frac{dp}{dt} &= \alpha p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \alpha dt \end{aligned}$$

Luego se integra la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{p} &= \int \alpha dt \Rightarrow \ln p = \alpha t + C_1 \Rightarrow p = e^{\alpha t + C_1} = e^{\alpha t} e^{C_1} = e^{\alpha t} C \Rightarrow p(t) \\ &= C e^{\alpha t} \end{aligned}$$

Hasta aquí hemos obtenido la solución general de la ecuación diferencial ordinaria del modelo de Malthus, pero debemos considerar que la población inicial $p(0)=p_0$ y con esta expresión se calcula la constante C y posteriormente en (19) se obtiene la solución analítica del modelo de Malthus:

$$p(0) = p_0 = C e^{\alpha 0} = C \Rightarrow C = p_0 \Rightarrow p(t) = p_0 e^{\alpha t}$$

A continuación, se realiza la aplicación de los cuatro métodos numéricos propuestos a este modelo, para esto se utiliza el siguiente ejemplo práctico.

Crecimiento de bacterias después de t horas:

En el año 2010 los investigadores (Espinosa Herrera y otros, 2010) de la Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Azcapotzalco de la Ciudad de México, presentaron un trabajo basado en el estudio de las ecuaciones diferenciales y desarrollaron algunas aplicaciones del modelo de Malthus; entre ellas se plantea el estudio en un cultivo de bacterias, donde se determinó que al principio había 150 bacterias y 200 después de una hora (h). Se supone un crecimiento rápido proporcional a la cantidad de bacterias presente, se determina la cantidad de bacterias pasadas 10 horas.

El desarrollo matemático indica lo siguiente: Si $p(t)$ es la cantidad de bacterias presentes después de t horas, entonces $p(0)=p_0=150$ y $p(1)=p_1=200$. Luego $p(t)$ está dada por la solución del problema de valor inicial:

$$p'(t) = \alpha p(t), \quad \text{con } p(0) = 150 \text{ y } p(1) = 200$$

Puesto que la solución analítica al modelo de Malthus es $p(t)=p_0 e^{\alpha t}$, se tiene:

$$\begin{aligned} p(0) = 150 &\Rightarrow p_0 e^0 = 150 \Rightarrow p(t) = 150 e^{\alpha t} \\ p(1) = 200 &\Rightarrow 150 e^{\alpha} = 200 \Rightarrow e^{\alpha} = \frac{200}{150} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.28768207245 \\ &\Rightarrow p(t) = 150 e^{0.28768207245 t} \end{aligned}$$

Entonces la cantidad de bacterias después de 10 horas es:

$$p(10) = 150 e^{(0.28768207245)(10)} = 2663.66 \text{ Bacterias}$$

Con este sencillo ejemplo se puede estimar el crecimiento del número de bacterias, transcurrido cierto periodo. Este ejercicio puede ser aplicado a cualquier otra especie, donde se requiera analizar el comportamiento de su crecimiento.

Aplicación de métodos numéricos:

Una vez que se aplicaron los cuatro métodos numéricos seleccionados, con el apoyo de la herramienta informática MATLAB, al presente ejemplo del modelo matemático de Malthus, con $p(0)=150$ y $\alpha=0.28768207245$, utilizando 10 subintervalos, a continuación, se presentan en la Tabla 1 los resultados de forma numérica y en la Figura 6 los resultados de forma gráfica:

Tabla 1.

Estimación del crecimiento de bacterias presentes transcurridas 10 horas. Resultados por hora de la solución analítica del modelo de Malthus Vs. la aplicación de los métodos numéricos seleccionados.

Estimación del crecimiento	Cálculo por horas de la Solución Analítica del Modelo de Malthus Vs. Aplicación de Métodos Numéricos				
	Solución Analítica	Heun Orden 2	Runge-Kutta Orden 4	Adams-Basforth 4	Adams-Moulton 4
0	150	150	150	150	150
1	199.99999999644	199.359383978185	199.997413815407	199.997413815407	199.997413815407
2	266.666666665717	264.961093201075	266.659770219008	266.659770219008	266.659770219008
3	355.55555553656	352.149868791684	355.541762749416	355.541762749416	355.560656227743
4	474.074074070697	468.029206068724	474.049553688363	473.872289367076	474.100746164866
5	632.09876542647	622.040094704398	632.057898386804	631.527419393285	632.16066851477
6	842.798353900459	826.730200600002	842.732967059749	841.662994602442	842.915998385883
7	1123.73113853194	1098.77615671852	1123.62942632623	1121.73043186212	1123.93481010917
8	1498.30818470659	1460.34225155547	1498.15319568091	1494.98258961854	1498.64216594984
9	1997.7442462719	1940.88621111609	1997.51176423646	1992.4296151593	1998.27278358182
10	2663.65899502445	2579.55919613237	2663.31457942096	2655.40152253268	2664.47468921505

Tabla 2.

Cálculo de los errores de la aplicación de los métodos numéricos seleccionados a la solución analítica del modelo de Malthus.

Modelo de Malthus: Cálculo de Errores				
Métodos Numéricos aplicados a la Solución Analítica				
Número de Subintervalos	Errores cometidos por método			
	Heun Orden 2	Runge-Kutta Orden 4	Adams-Basforth 4	Adams-Moulton 4
10	84.0997988920781	0.344415603494781	8.25747249176993	0.815694190598606

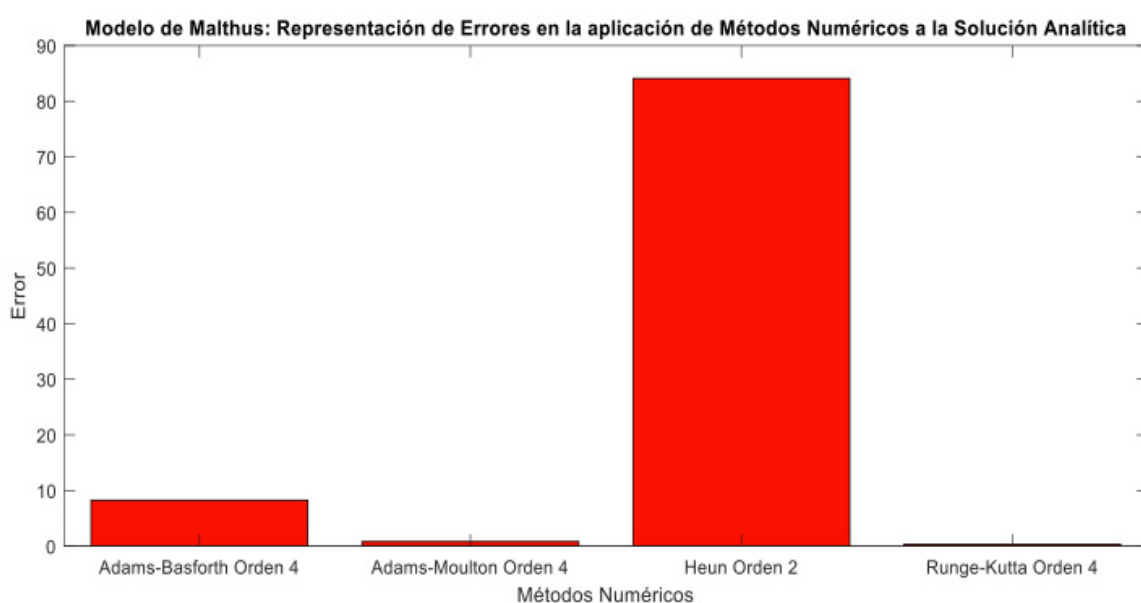


Figura 6. Representación gráfica de los errores en la aplicación de los métodos numéricos seleccionados a la solución analítica del modelo de Malthus.

De los resultados obtenidos en la Tabla 2 y de su representación gráfica en la Figura 7, se puede apreciar que el método numérico que mejor se ajusta a la solución analítica de esta aplicación del modelo matemático de Malthus, es el método de Runge-Kutta de orden 4, cuyo error es 0.344415603494781; seguido del método de Adams-Basforth de orden 4, cuyo error es 8.25747249176993. El método de Adams-Moulton de orden 4 a pesar de que su error es 0.815694190598606, presenta un comportamiento irregular y los datos obtenidos no permiten tener certeza en la estimación; el método de Heun de orden 2 es el que menor ajuste presenta, su error es 84.0997988920781. Queda claro con esta aplicación que se puede estimar el crecimiento de bacterias transcurrido el tiempo que queramos.

Aplicación de los métodos numéricos al modelo logístico de Verhulst

La solución analítica al modelo es:

$$p(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - p_0}{p_0}\right) e^{-rt}}$$

Desarrollo matemático de la solución analítica:

Se inicia con la resolución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$p'(t) = r p(t) \left(1 - \frac{p(t)}{K}\right)$$

$$\frac{dp}{dt} = r p \left(1 - \frac{p}{K}\right) \Rightarrow \frac{dp}{p \left(1 - \frac{p}{K}\right)} = r dt \Rightarrow \int \frac{dp}{p \left(1 - \frac{p}{K}\right)} = rt + C$$

Se resuelve la integral del primer miembro a través de fracciones parciales:

$$p'(t) = r p(t) \left(1 - \frac{p(t)}{K}\right)$$

$$\frac{dp}{dt} = r p \left(1 - \frac{p}{K}\right) \Rightarrow \frac{dp}{p \left(1 - \frac{p}{K}\right)} = r dt \Rightarrow \int \frac{dp}{p \left(1 - \frac{p}{K}\right)} = rt + C$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p \left(1 - \frac{p}{K}\right)} &= \frac{A}{p} + \frac{B}{1 - \frac{p}{K}} \Rightarrow A \left(1 - \frac{p}{K}\right) + Bp = 1 \Rightarrow \left(B - \frac{A}{K}\right)p + A = 1 \Rightarrow A \\ &= 1 \text{ \& } B - \frac{A}{K} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = 1 \text{ \& } B = \frac{1}{K}$$

Luego,

$$\int \frac{dp}{p \left(1 - \frac{p}{K}\right)} = \int \left[\frac{1}{p} + \frac{\frac{1}{K}}{1 - \frac{p}{K}} \right] dp = \ln p + \frac{1}{K} \int \frac{dp}{1 - \frac{p}{K}} = \ln p - \ln |K - p|$$

Tomando $p < K$, se tiene que $|K - p| = K - p$, por lo tanto:

$$\ln \left(\frac{p}{K - p} \right) = rt + C \Rightarrow \frac{p}{K - p} = C e^{rt}$$

Ahora vamos a usar la expresión de condición inicial $p(0)=p_0$, para calcular C antes de despejar p:

$$\frac{p_0}{K - p_0} = Ce^0 = C \Rightarrow \frac{p}{K - p} = \frac{p_0}{K - p_0} e^{rt}$$

El siguiente paso es despejar p :

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{K - p_0} = C \Rightarrow \frac{p}{K - p} = Ce^{rt} &\Rightarrow p = (K - p)Ce^{rt} = KCe^{rt} - pCe^{rt} \\ &\Rightarrow p + pCe^{rt} = KCe^{rt} \\ &\Rightarrow p = \frac{KCe^{rt}}{1 + Ce^{rt}} \end{aligned}$$

Se divide el numerador y denominador entre Ce^{rt} para poder simplificar la expresión anterior y finalmente en (29) se obtiene:

$$p(t) = \frac{K}{\frac{1}{Ce^{rt}} + 1} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - p_0}{p_0}\right)e^{-rt}}$$

A continuación, se realiza la aplicación de los cuatro métodos numéricos propuestos a este modelo, para esto se utiliza el siguiente ejemplo práctico.

Crecimiento de la biomasa del Halibut (especie de gran tamaño, parecida al lenguado) en el Pacífico después de t años:

En el año 2010 los investigadores (Espinosa Herrera y otros, 2010) de la Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Azcapotzalco de la Ciudad de México, presentaron un trabajo basado en el estudio de las ecuaciones diferenciales y desarrollaron algunas aplicaciones del modelo de Verhulst; entre ellas se plantea un estudio sobre la especie Halibut, en el Pacífico, donde se utiliza el modelo logístico con una capacidad sustentable de $80.5 \cdot 10^6$, medida en kg (biomasa), y razón de crecimiento intrínseco de 0.71 por año. Si la biomasa inicial es la cuarta parte de la capacidad sustentable, se debe encontrar la biomasa después de cinco años.

El desarrollo matemático indica lo siguiente: El problema de valor inicial por resolver

$$\text{es: } p'(t) = r p(t) \left(1 - \frac{p(t)}{K}\right) \text{ con } r = 0.71, K = 80.5 \cdot 10^6 \text{ Kg de Biomasa y } p_0 = \frac{K}{4}$$

Hay que notar que $p(t)$ no es el número de habitantes de la población sino la biomasa al tiempo t , es decir, la masa total de los peces de esta especie. Su solución es:

$$E \quad p(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - p_0}{p_0}\right)e^{-rt}} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - \frac{K}{4}}{\frac{K}{4}}\right)e^{-rt}} = \frac{K}{1 + 3e^{-rt}} = \frac{80.5 \cdot 10^6}{1 + 3e^{-0.71t}}$$

$$p(5) = \frac{80.5 * 10^6}{1 + 3e^{-0.71*5}} = 741133612.16 \text{ kg}$$

Aplicación de métodos numéricos:

Una vez que se aplicaron los cuatro métodos numéricos seleccionados, con el apoyo de la herramienta informática MATLAB, al presente ejemplo del modelo matemático de Verhulst, con $p_0=K/4, r=0.71$ y $K=80.5*10^6$ Kg de Biomasa, utilizando 10 subintervalos, a continuación, se presentan en la Tabla 3 los resultados de forma numérica y en la Figura 8 los resultados de forma gráfica:

Tabla 3.

Estimación del crecimiento de la Biomasa del Halibut en el pacífico, transcurridos 5 años. Resultados por año de la solución analítica del modelo de Verhulst Vs. la aplicación de los métodos numéricos seleccionados.

Modelo de Verhulst: Crecimiento de la biomasa del Halibut en el Pacífico después de t años					
Estimación del crecimiento	Cálculo por años de la Solución Analítica del Modelo de Verhulst Vs. Aplicación de Métodos Numéricos				
Tiempo en años	Solución Analítica	Heun Orden 2	Runge-Kutta Orden 4	Adams-Basforth 4	Adams-Moulton 4
0	201250000	201250000	201250000	201250000	201250000
0.5	259382866.712873	258955214.552002	259381394.25201	259381394.25201	259381394.25201
1	325261383.876696	324402208.054996	325258713.798159	325258713.798159	325258713.798159
1.5	395736163.70082	394481838.289492	395732694.804918	395732694.804918	395749639.722517
2	466628240.658506	465025189.110997	466624266.983972	466370407.644552	466668316.978693
2.5	533660256.568165	531750720.613452	533655793.745521	533072184.694927	533721531.395643
3	593433799.544673	591269732.016657	593428622.148063	592663997.682685	593498354.126828
3.5	644012023.170587	641675030.214091	644005900.807464	643278892.483745	644062497.318495
4	684944912.086967	682546177.638175	684937841.595987	684420500.604747	684974078.353056
4.5	716894027.848541	714553089.361084	716886288.2107	716626365.361067	716904585.419249
5	741133612.164767	738952890.759851	741125652.963944	741077283.436191	741132643.692353

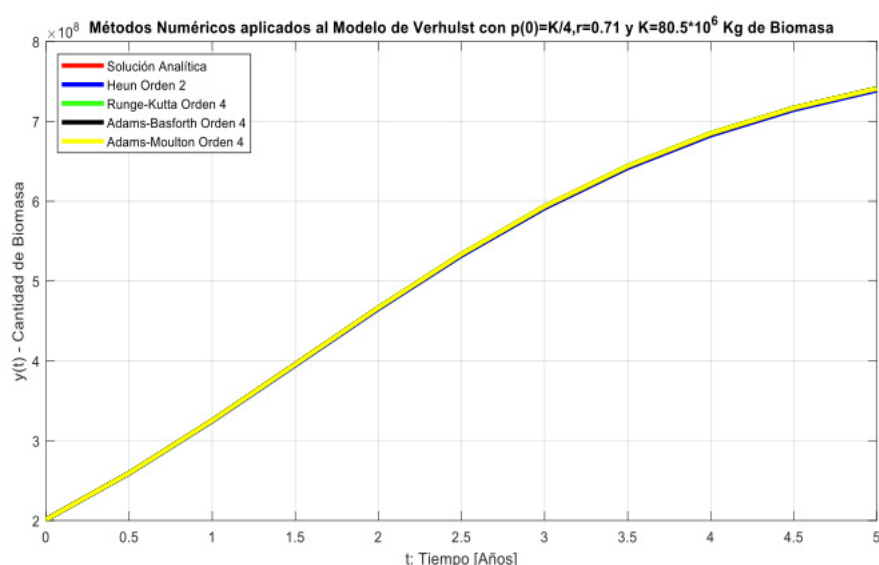


Figura 7. Métodos Numéricos aplicados al Modelo de Verhulst.

Tabla 4.

Cálculo de los errores de la aplicación de los métodos numéricos seleccionados a la solución analítica del modelo de Verhulst.

Modelo de Verhulst: Cálculo de Errores Métodos Numéricos aplicados a la Solución Analítica				
Número de Subintervalos	Errores cometidos por método			
	Heun Orden 2	Runge-Kutta Orden 4	Adams-Basforth 4	Adams-Moulton 4
10	2398734.4487921	7959.20082247257	769801.86198771	64554.5821546316

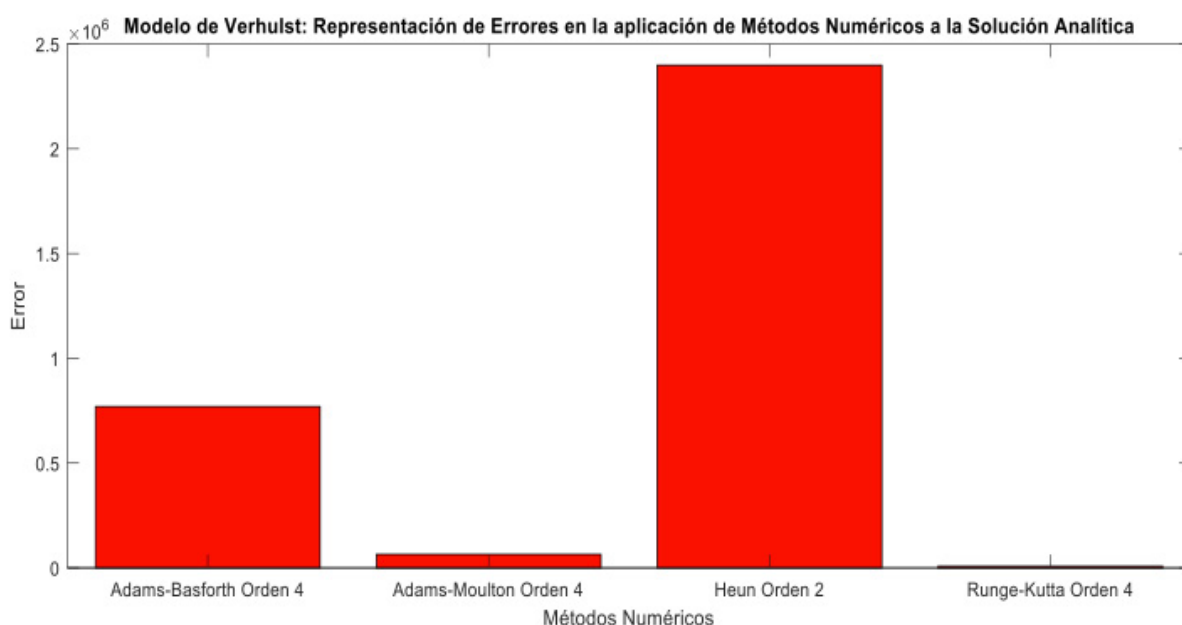


Figura 8. Representación gráfica de los errores de la aplicación de los métodos numéricos seleccionados a la solución analítica del modelo de Verhulst.

De los resultados obtenidos en la Tabla 4 y de su representación gráfica en la Figura 9, se puede apreciar que ocurre algo parecido al análisis realizado en la aplicación del modelo de Malthus; el método numérico que mejor se ajusta a la solución analítica de esta aplicación del modelo matemático de Verhulst, es el método de Runge-Kutta de orden 4, cuyo error es 7959.20082247257; seguido del método de Adams-Basforth de orden 4, cuyo error es 769801.86198771. El método de Adams-Moulton de orden 4 a pesar de que su error es 64554.5821546316, sigue presentando un comportamiento irregular y los datos obtenidos no nos permiten tener certeza en la estimación; el método de Heun de orden 2 es el que menor ajuste presenta, su error es 2398734.4487921. Se puede apreciar además con esta aplicación que se puede estimar la biomasa de cualquier especie, transcurrido cierto periodo.

Aplicación de los métodos numéricos al modelo de Gompertz

La ecuación diferencial de Gompertz se resuelve explícitamente y sus soluciones son:

$$p(t) = Ae^{-Be^{-Kt}}$$

Desarrollo matemático de la solución analítica:

Se inicia con la resolución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$p'(t) = Kp(t) \ln\left(\frac{A}{p(t)}\right)$$

$$\frac{1}{p \ln\left(\frac{A}{p}\right)} \frac{dp}{dt} = K$$

Luego se integra a ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{1}{p \ln\left(\frac{A}{p}\right)} \frac{dp}{dt} dt = \int K dt$$

Se realiza un cambio de variable para la integral que se encuentra al lado izquierdo de la ecuación:

$$W = p \Rightarrow dW = \frac{dp}{dt} dt$$

Ahora se procede a sustituir los valores W y dW en la integral:

$$\int \frac{dW}{W \ln\left(\frac{A}{W}\right)} = \int K dt$$

Luego se utiliza el método de cambio de variables en la integral del lado izquierdo del signo igual:

$$U = \ln\left(\frac{A}{W}\right) \text{ y } dU = -\frac{1}{W} dW$$

Luego se sustituye el valor de U y dU en la integral izquierda de la ecuación:

$$-\int \frac{dU}{U} = -\ln(U) + C_1 \Rightarrow \int \frac{dW}{W \ln\left(\frac{A}{W}\right)} = -\ln\left(\ln\left(\frac{A}{W}\right)\right) + C_1$$

Con esto la solución de la integral del lado derecho es:

$$\int K dt = Kt + C_2 \Rightarrow \ln\left(\ln\left(\frac{A}{W}\right)\right) = -Kt + C_3$$

Con esto tenemos que $C_3 = C_1 + C_2$ como constante de integración y luego se aplica la función exponencial a ambos lados de la ecuación y se tiene:

$$\ln\left(\frac{A}{W}\right) = C_4 e^{-Kt} \Rightarrow \frac{A}{W} = e^{C_4 e^{-Kt}} \Rightarrow \frac{A}{W} = e^{Be^{-Kt}}$$

Si al final despejamos W, obtenemos en (39) la solución de la ecuación diferencial del modelo de Gompertz:

$$W = Ae^{-Be^{-Kt}} \Rightarrow W = p(t) \Rightarrow p(t) = Ae^{-Be^{-Kt}}$$

A continuación, se realiza la aplicación de los cuatro métodos numéricos propuestos, a este modelo, para esto se utiliza información del siguiente estudio sobre el crecimiento individual de especies.

Crecimiento individual de la Almeja Panopea Generosa en su límite sur de distribución: aplicación de la teoría de modelos múltiples:

En el año 2015, (Hidalgo de la Toba, 2015) presentó un estudio sobre el crecimiento individual de la Almeja Panopea Generosa. Según el investigador esta Almeja, se distribuye a lo largo de toda la zona templada del Pacífico de Norteamérica, desde Alaska hasta Baja California y es descrita como una especie que alcanza grandes tallas, posee una prolongada longevidad y presenta un lento crecimiento. Esta investigación describió el crecimiento individual y la estructura poblacional de esta especie ubicada en su límite sur de distribución en la localidad de Punta Canoas. Se obtuvo información sobre la longitud de concha y el peso total de organismos provenientes de la pesquería comercial que se realiza en el sitio. La edad individual se determinó mediante el conteo de las líneas de crecimiento de 243 organismos. La longitud promedio de concha fue de 113.5 ± 13.5 mm, peso promedio total de 511.8 ± 158.1 g y edad promedio de 12.5 ± 4.7 años. La información de talla a la edad fue ajustada a los modelos de crecimiento de Von Bertalanffy, Gompertz, Logístico, Johnson, generalizado de Von Bertalanffy y Schnute siguiendo un enfoque de inferencia de modelos múltiples (IMM). El modelo de crecimiento de Gompertz muestra una etapa de rápido crecimiento donde el 75% de la longitud máxima estimada (≈ 117 mm) se adquiere entre los 4 y 5 años, alcanzando la longitud asintótica próxima a los 10 años.

En la Tabla 5, (Hidalgo de la Toba, 2015) muestra los parámetros de los seis modelos de crecimiento, estimados a partir de 2000 simulaciones Monte Carlo ajustado con suma de cuadrados residuales:

Tabla 5.

Parámetros de los seis modelos de crecimiento estimados a partir de 2000 simulaciones Monte Carlo ajustado con suma de cuadrados residuales (SCR)

Modelo	Parámetro	Valor
Von Bertalanffy	A (mm)	122.59
	K	0.26
Gompertz	A (mm)	118.62
	K	0.44
Logístico	A (mm)	126.34
	K	0.23
Johnson	A (mm)	137.65
	K	0.49
Generalizado V. Bertalanffy	A (mm)	137.37
	K	0.07
Schnute	A (mm)	137.38
	K	N/A

Aplicación de métodos numéricos:

Para la aplicación de los cuatro métodos numéricos propuestos se utiliza solo la información de los parámetros del modelo de Gompertz: $A(\text{mm})=118.62$ y $K=0.44$

Una vez que se aplicaron los métodos numéricos seleccionados al modelo matemático de Gompertz, con el apoyo de la herramienta informática MATLAB, con los datos obtenidos en el presente estudio de crecimiento individual: $A=118.62, K=0.44$ y $L(0)=12.22$, utilizando 10 subintervalos y la estimación del crecimiento de esta especie luego de 10 años. A continuación, se presentan en la Tabla 6 los resultados de forma numérica y en la Figura 10 los resultados de forma gráfica:

Tabla 6.

Estimación del crecimiento de la Almeja Panopea Generosa transcurridos 10 años. Resultados por año de la solución analítica del modelo de Gompertz vs. la aplicación de los métodos numéricos seleccionados.

Modelo de Gompertz: Estimación del crecimiento de la Almeja Panopea Generosa transcurridos $t(\text{años})$					
Estimación del crecimiento	Cálculo por año de la Solución Analítica del Modelo de Gompertz Vs. Aplicación de Métodos Numéricos				
Tiempo en años	Solución Analítica	Heun Orden 2	Runge-Kutta Orden 4	Adams-Basforth 4	Adams-Moulton 4
0	12.2215139066345	12.2215139066345	12.2215139066345	12.2215139066345	12.2215139066345
1	27.4456028520576	26.8264092877008	27.4302691620689	27.4302691620689	27.4302691620689
2	46.2118690423025	45.1986504099975	46.1922124575102	46.1922124575102	46.1922124575102
3	64.6378026594819	63.4479857907092	64.6188837000421	64.6188837000421	64.6677703066421
4	80.2313272158906	78.9912618874215	80.2146498894089	79.7369438738316	80.2506849996844
5	92.2128734877325	91.0149771837082	92.1986479230149	92.1395272062287	92.2087818841866
6	100.860704633091	99.7767376721013	100.848850690812	100.7894579053	100.84460898971
7	106.85494391694	105.927500746259	106.845317861153	107.17376102961	106.837553066365
8	110.902746859655	110.144627926932	110.895139637535	110.944643831906	110.889003166657
9	113.590496663545	112.992733085531	113.584636906316	113.960617039443	113.58130865091
10	115.355891831266	114.897651882644	115.35147819202	115.205894331459	115.350454447888

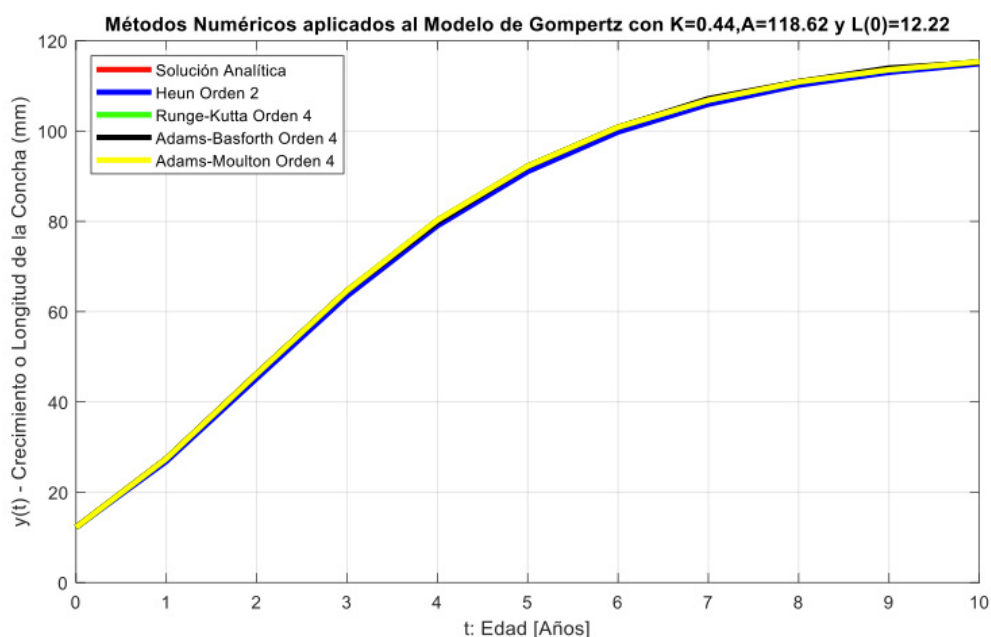


Figura 10. Métodos Numéricos aplicados al modelo de Gompertz.

Tabla 7.

Cálculo de los errores de la aplicación de los métodos numéricos seleccionados a la solución analítica del modelo de Gompertz.

Modelo de Gompertz: Cálculo de Errores Métodos Numéricos aplicados a la Solución Analítica				
Número de Subintervalos	Errores cometidos por método			
	Heun Orden 2	Runge-Kutta Orden 4	Adams-Basforth 4	Adams-Moulton 4
10	1.24006532846916	0.019656584792294	0.494383342059024	0.0299676471602197

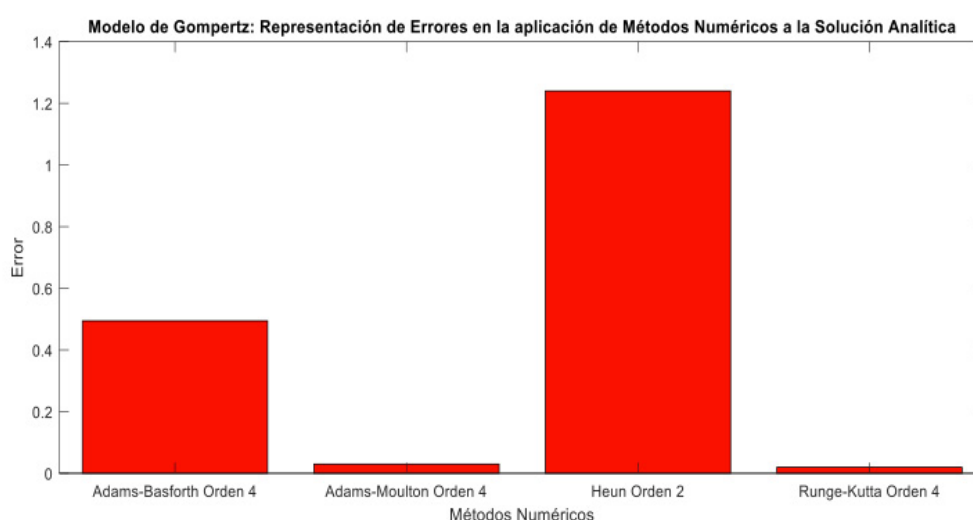


Figura 11. Representación gráfica de los errores de la aplicación de los métodos numéricos seleccionados a la solución analítica del modelo de Gompertz.

De los resultados obtenidos en la Tabla 7 y de su representación gráfica en la Figura 11, se puede apreciar que ocurre algo nuevo respecto de los análisis realizados a las aplicaciones de los modelos de Malthus y Verhulst; el método numérico que mejor se ajusta a la solución analítica de esta aplicación del modelo matemático de Gompertz, es el método de Runge-Kutta de orden 4, cuyo error es 0.019656584792294; seguido del método de Heun de orden 2, cuyo error es 1.24006532846916. Los métodos de Adams-Basforth y Adams-Moulton de orden 4 a pesar de que sus errores son 0.494383342059024 y 0.0299676471602197 respectivamente, presentan comportamientos irregulares y los datos obtenidos no permiten tener certeza en la estimación. Se puede observar con esta aplicación que es posible estimar el crecimiento de cualquier especie, transcurrido los años que queramos, sin olvidar que cada especie tiene su propia expectativa de vida.

Aplicación de los métodos numéricos al modelo de Von Bertalanffy

Por el método de separación de variables, se puede llegar a la solución al modelo de Von Bertalanffy:

$$L(t) = A(1 - e^{-K(t-t_0)})$$

Desarrollo matemático de la solución analítica:

Se inicia con la resolución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$L'(t) = K(A - L(t))$$

$$\frac{1}{(A - L(t))} \frac{dL(t)}{dt} = K$$

Luego se integra a ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{1}{(A - L(t))} \frac{dL(t)}{dt} dt = \int K dt$$

Ahora se realiza un cambio de variable para la integral que se encuentra al lado izquierdo de la ecuación:

$$W = L(t) \Rightarrow dW = \frac{dL(t)}{dt} dt$$

Ahora se procede a sustituir los valores W y dW en la integral:

$$\int \frac{dW}{A - W} = \int K dt$$

Luego se utiliza el método de cambio de variables en la integral del lado izquierdo del signo igual:

$$U = A - W \text{ y } dU = -dW$$

Luego se sustituye el valor de U y dU en la integral izquierda de la ecuación:

$$-\int \frac{dU}{U} = -\ln(U) + C_1 = -\ln(A - W) + C_1$$

Con esto la solución de la integral del lado derecho es:

$$\int K dt = Kt + C_2$$

Con esto tenemos que C_1 y C_2 son constantes de integración; luego se obtiene la solución de la ecuación diferencial del modelo de Von Bertalanffy:

$$\ln(A - W) = -Kt + C_3$$

Con esto tenemos que $C_3 = C_1 + C_2$ como constante de integración y luego se aplica la función exponencial a ambos lados de la ecuación y se tiene:

$$A - W = C_4 e^{-Kt} \Rightarrow W = A - C_4 e^{-Kt} \Rightarrow L(t) = A - C_4 e^{-Kt}$$

Luego aplicamos la condición inicial:

$$L(0) = A - C_4 = L_0 \Rightarrow C_4 = L_0 - A$$

Y se sustituye el valor de C_4 :

$$L(t) = A - (L_0 - A) e^{-Kt}$$

$$L(t_0) = A - (L_0 - A) e^{-Kt_0} = 0$$

$$L_0 = A + A e^{Kt_0}$$

$$L(t) = A - (A + A e^{Kt_0} - A) e^{-Kt} = A - A e^{-K(t-t_0)}$$

Obtenemos en (55) el modelo propuesto por Von Bertalanffy:

$$L(t) = A(1 - e^{-K(t-t_0)})$$

A continuación, se realiza la aplicación de los cuatro métodos numéricos propuestos, a este modelo, para esto se utiliza información del siguiente estudio sobre el crecimiento individual de especies.

Análisis multimodelo del crecimiento de *Pseudoplatystoma orinocoense* en la cuenca media del Orinoco, Venezuela:

En 2019 los investigadores (González y otros, Enero - Junio 2019) publicaron un estudio basado en un análisis multimodelo del crecimiento de *Pseudoplatystoma orinocoense* en la cuenca media del Orinoco, Venezuela. Esta especie es un bagre dulceacuícola perteneciente a la familia Pimelodidae, endémica de la cuenca del río Orinoco. En este río se encuentra entre las especies más importantes desde el punto de vista pesquero y comercial; también es conocida comúnmente como Rayao en Venezuela y Colombia. Los modelos usados fueron Von Bertalanffy, el modelo de Verhulst o Logístico y Gompertz, derivados del modelo de Richards, cuyos ajustes dependieron de la información contenida en los datos. Cuando los datos incluyeron todas las edades el modelo de Von Bertalanffy produjo el mejor ajuste, coincidiendo con resultados anteriores de crecimiento de la especie. Al excluir las edades de uno y dos años, como ocurre con los datos provenientes de la pesca artesanal debido a la selectividad, el mejor ajuste lo produjeron los modelos de Verhulst y el de Gompertz. En este estudio (González y otros, Enero - Junio 2019) usaron tres grupos de datos que incluyeron los de longitud-edad observados según el número de anillos de crecimiento en la espina dorsal de la especie en mención, el total de datos retro-calculados para todas las edades, y un subconjunto de datos retro-calculados que excluyeron a peces de uno y dos años de edad; estos dos últimos grupos de datos fueron ajustados anteriormente seleccionando a priori el modelo de Von Bertalanffy, que fue precisamente el objetivo de este trabajo, verificar o no el ajuste de estos datos a dicho modelo, usando además otros modelos de crecimiento para seleccionar realmente el de mejor ajuste. En la tabla 8, los autores (González y otros, Enero - Junio 2019) muestran los parámetros de crecimiento de los tres modelos que se utilizaron en este estudio, a los que se les aplicaron un ajuste no lineal:

Tabla 8.

Parámetros de crecimiento de los tres modelos utilizados en este estudio a los que se les aplicaron ajuste no lineal.

Modelo	Parámetro	Valor
Von Bertalanffy	A (cm)	81.2
	K	0.386
Logístico	A (cm)	73.0
	K	0.554
Gompertz	A (cm)	80.1
	K	0.067

Aplicación de métodos numéricos:

Para la aplicación de los cuatro métodos numéricos propuestos se utiliza solo la información de los parámetros del modelo de Von Bertalanffy: $A(\text{cm})=81.2$ y $K=0.386$

Una vez que se aplicaron los métodos numéricos seleccionados al modelo matemático de Von Bertalanffy, con el apoyo de la herramienta informática MATLAB, con los datos obtenidos en el presente estudio de crecimiento individual: $A=81.2$, $K=0.386$ y $L(0)=0$, utilizando 10 subintervalos y la estimación del crecimiento de esta especie luego de 10 años, a continuación, se presentan en la Tabla 9 los resultados de forma numérica y en la Figura 12 los resultados de forma gráfica:

Tabla 9.

Estimación del crecimiento de Pseudoplatystoma orinocoense transcurridos 10 años. Resultados por año de la solución analítica del modelo de Von Bertalanffy vs. la aplicación de los métodos numéricos seleccionados.

Modelo de Von Bertalanffy: Estimación del crecimiento de Pseudoplatystoma orinocoense transcurridos $t(\text{años})$					
Estimación del crecimiento	Cálculo por año de la Solución Analítica del Modelo de Von Bertalanffy vs. Aplicación de Métodos Numéricos				
Tiempo en años	Solución Analítica	Heun Orden 2	Runge-Kutta Orden 4	Adams-Basforth 4	Adams-Moulton 4
0	0	0	0	0	0
1	26.0026333147579	25.2939624	25.9971882874125	25.9971882874125	25.9971882874125
2	43.6784570322036	42.7088049244752	43.6710539288746	43.6710539288746	43.6710539288746
3	55.6939610124443	54.6988891728913	55.6864120229534	55.6864120229534	55.697501571425
4	63.8617464694065	62.9540381977573	63.8549040245143	63.740037514956	63.869170146071
5	69.4139662831298	68.6376917910795	69.4081518808929	69.3168038010605	69.422710230426
6	73.1882016645971	72.5508759227747	73.1834584795259	73.0108277388182	73.1966204948543
7	75.7538156338985	75.2450953710785	75.7500537913686	75.675710924209	75.7612290978955
8	77.4978443905032	77.1000600727968	77.494921743857	77.3357253593381	77.5040312860031
9	78.683383735182	78.3771995600005	78.6811485547505	78.6650556030161	78.6883694423984
10	79.489278438729	79.2565075426612	79.4875901223634	79.3425802291259	79.4931976078187

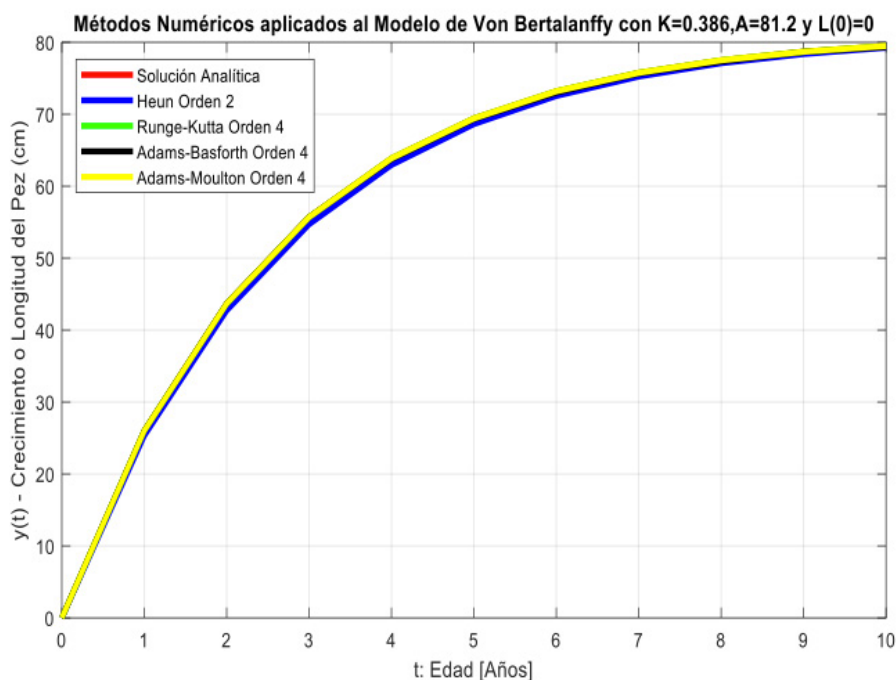


Figura 12. Métodos numéricos aplicados al modelo de Von Bertalanffy.

Tabla 10.

Cálculo de los errores en la aplicación de los métodos numéricos seleccionados a la solución analítica del modelo de Von Bertalanffy.

Modelo de Von Bertalanffy: Cálculo de Errores Métodos Numéricos aplicados a la Solución Analítica				
Número de Subintervalos	Errores cometidos por método			
	Heun Orden 2	Runge-Kutta Orden 4	Adams-Basforth 4	Adams-Moulton 4
10	0.995071839552928	0.00754898949087845	0.177373925778937	0.00874394729626715

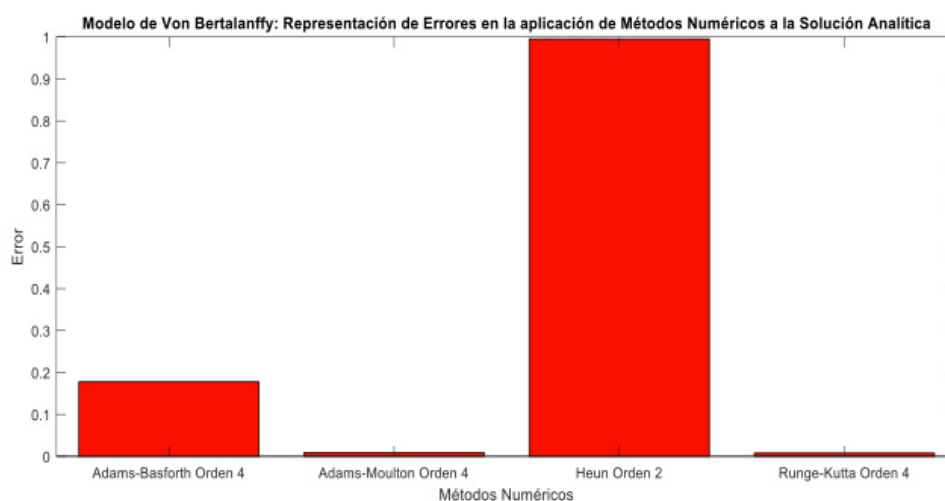


Figura 13. Representación gráfica de los errores de la aplicación de los métodos numéricos seleccionados a la solución analítica del modelo de Von Bertalanffy.

De los resultados obtenidos en la Tabla 10 y de su representación gráfica en la Figura 13, se puede apreciar que ocurre algo parecido al análisis realizado en la aplicación de los modelos de Malthus y Verhulst. El método numérico que mejor se ajusta a la solución analítica de esta aplicación del modelo matemático de Von Bertalanffy, es el método de Runge-Kutta de orden 4, cuyo error es 0.00754898949087845; seguido del método de Adams-Basforth de orden 4, cuyo error es 0.177373925778937. El método de Adams-Moulton de orden 4 a pesar de que su error es 0.00874394729626715, sigue presentando un comportamiento irregular y los datos obtenidos no permiten tener certeza en la estimación; el método de Heun de orden 2 es el que menor ajuste presenta y su error es 0.995071839552928. Al igual que en los casos anteriores, se observa con esta aplicación que se puede estimar el crecimiento de cualquier especie, transcurrido los años que queramos, sin olvidar que cada especie en particular tiene su propia expectativa de vida.

Aplicación de los métodos numéricos al modelo de Brody

Según (Trinidad Bello, 2014) al resolver la ecuación diferencial, se integra y se obtiene el modelo de Brody:

$$P(t) = A(1 - Be^{-Kt})$$

Desarrollo matemático de la solución analítica:

Se inicia con la resolución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$P'(t) = K(A - P(t))$$

$$\frac{1}{(A - P(t))} \frac{dP(t)}{dt} = K$$

Luego se integra a ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{1}{(A - P(t))} \frac{dP(t)}{dt} dt = \int K dt$$

Ahora se realiza un cambio de variable para la integral que se encuentra al lado izquierdo de la ecuación:

$$W = P(t) \Rightarrow dW = \frac{dP(t)}{dt} dt$$

Ahora se procede a sustituir los valores W y dW en la integral:

$$\int \frac{dW}{A - W} = \int K dt$$

Luego se utiliza el método de cambio de variables en la integral del lado izquierdo del signo igual:

$$U = A - W \text{ y } dU = -dW$$

Luego se sustituye el valor de U y dU en la integral izquierda de la ecuación:

$$-\int \frac{dU}{U} = -\ln(U) + C_1 = -\ln(A - W) + C_1$$

Con esto la solución de la integral del lado derecho es:

$$\int K dt = Kt + C_2$$

Con esto tenemos que C_1 y C_2 son constantes de integración; luego se obtiene la solución de la ecuación diferencial del modelo de Brody:

$$\ln(A - W) = -Kt + C_3$$

Con esto tenemos que $C_3 = C_1 + C_2$ como constante de integración y luego se aplica la función exponencial a ambos lados de la ecuación y se tiene:

$$A - W = C_4 e^{-Kt} \Rightarrow W = A - C_4 e^{-Kt} \Rightarrow P(t) = A - C_4 e^{-Kt}$$

Luego aplicamos la condición inicial:

$$P(0) = A - C_4 = P_0 \Rightarrow C_4 = P_0 - A$$

Y se sustituye el valor de C_4 :

$$P(t) = A - (P_0 - A) e^{-Kt}$$

$$P(t_0) = A - (P_0 - A) e^{-Kt_0} = 0$$

$$P_0 = A + A e^{Kt_0}$$

$$P(t) = A - (A + A e^{Kt_0} - A) e^{-Kt} \Rightarrow B = e^{Kt_0} = A - A B e^{-Kt}$$

Obtenemos en (71) el modelo propuesto por Brody

$$P(t) = A(1 - B e^{-Kt})$$

A continuación, se realiza la aplicación de los cuatro métodos numéricos propuestos, a este modelo, para esto se utiliza información del siguiente estudio sobre el crecimiento individual de especies.

Modelos no lineales para describir el crecimiento de bufalinos de la raza Murrah:

En 2008 los investigadores (Malhado y otros, 2008) publicaron un artículo cuyo objetivo fue analizar modelos no lineales para lograr predecir el crecimiento de bufalinos de la raza Murrah. Se utilizó información de 18 pesajes de forma bimestral, desde el nacimiento hasta los 40 meses de edad, de 236 búfalos, tanto machos como hembras de esta raza, los mismos fueron pesados entre los años

1992 y 1995. Los modelos no lineales que se utilizaron fueron: Brody, Von Bertalanffy, Richards, Verhulst o Logístico y Gompertz.

Los valores de los parámetros se muestran en la Tabla 11.

Tabla 11.

Estimaciones de los parámetros (A,K,B y M) y cuadrado medio del residuo (QMR), coeficiente de determinación (R^2) y porcentual de convergencia (C%) para los modelos de crecimiento ajustados en bufalinos de la raza Murrah.

Modelo	A	K	B	M	QMR	R^2	C%
Bertalanffy	625.1 \pm 2.8	0.0018 \pm 0.00002	0.58 \pm 0.004	-	470.4	99.1	86.0
Brody	688.0 \pm 4.6	0.0011 \pm 0.00002	0.98 \pm 0.003	-	12302.1	94.1	47.0
Gompertz	611.3 \pm 2.5	0.0022 \pm 0.00002	2.38 \pm 0.021	-	447.9	99.1	89.0
Logístico	601.9 \pm 2.3	0.0026 \pm 0.00002	-	3.23 \pm 0.03	489.6	99.1	94.0
Richards	647.0 \pm 4.9	0.0015 \pm 0.00005	0.86 \pm 0.002	1.50 \pm 0.09	985.7	99.0	39.0
A=Peso asintótico; K=Tasa de madurez; B=Constante de integración; M=Define la forma de la curva en los modelos, y consecuentemente determina en qué proporción el valor asintótico (A) ocurre el punto de inflexión de la curva.							

Aplicación de métodos numéricos:

Para la aplicación de los cuatro métodos numéricos propuestos se utiliza solo la información de los parámetros del modelo de Brody: A=688,K=0.0011 y B=0.98

Una vez que se aplicaron los métodos numéricos seleccionados al modelo matemático de Brody, con el apoyo de la herramienta informática MATLAB, con los datos obtenidos en el presente estudio de crecimiento individual A=688,K=0.0011 y B=0.98, utilizando 10 subintervalos y la estimación del crecimiento en peso de esta especie luego de 1460 días, a continuación, se presentan en la Tabla 12 los resultados de forma numérica y en la Figura 14 los resultados de forma gráfica:

Tabla 12.

Estimación del crecimiento en peso de Bufalinos de la raza Murrah transcurridos 1460 días. Resultados por días de la solución analítica del modelo de Brody vs. la aplicación de los métodos numéricos seleccionados.

Modelo de Brody: Estimación del crecimiento en peso de bufalinos de la raza Murrah transcurridos t(días)					
Estimación del crecimiento	Cálculo por año de la Solución Analítica del Modelo de Brody vs. Aplicación de Métodos Numéricos				
Tiempo en días	Solución Analítica	Heun Orden 2	Runge-Kutta Orden 4	Adams-Basforth 4	Adams-Moulton 4
0	13.76	13.76	13.76	13.76	13.76
146	113.795197986169	113.3478235968	113.794613402744	113.794613402744	113.794613402744
292	198.988439345422	198.226145222867	198.987443644246	198.987443644246	198.987443644246
438	271.541785761543	270.567614509574	271.540513803441	271.540513803441	271.542313364626
584	333.330584875079	332.223972438223	333.329140552934	333.31108952507	333.332154656011
730	385.951943978158	384.773450773523	385.950406437495	385.923626079556	385.954249852996
876	430.766011795972	429.561170419691	430.764440491365	430.727297681461	430.768799984787
1022	468.931135399973	467.733572785032	468.92957419581	468.888848040191	468.934212154476
1168	501.43380098325	500.267765502435	501.432281471108	501.38792802442	501.437019288384
1314	529.114132402578	527.996533674861	529.112676577405	529.068064829959	529.117382526788
1460	552.68760656951	551.629656864325	552.686228981854	552.641484821789	552.690808225347

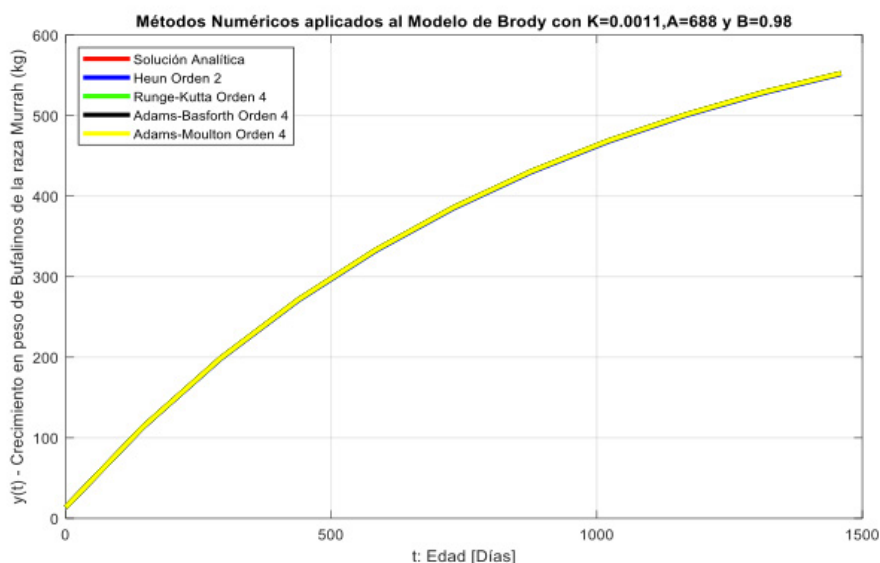


Figura 14. Métodos numéricos aplicados al modelo de Brody

Tabla 13.

Cálculo de los errores de la aplicación de los métodos numéricos seleccionados a la solución analítica del modelo de Brody.

Modelo de Brody: Cálculo de Errores Métodos Numéricos aplicados a la Solución Analítica				
Número de Subintervalos	Errores cometidos por método			
	Heun Orden 2	Runge-Kutta Orden 4	Adams-Basforth 4	Adams-Moulton 4
10	1.20484137628011	0.00157130460661392	0.0461217477209175	0.00325012421023985



Figura 15. Representación gráfica de los errores de la aplicación de los métodos numéricos seleccionados a la solución analítica del modelo de Brody.

De los resultados obtenidos en la Tabla 13 y de su representación gráfica en la Figura 15, se puede apreciar que ocurre algo parecido al análisis realizado en la aplicación de los modelos de Malthus, Verhulst y Von Bertalanffy; el método numérico que mejor se ajusta a la solución analítica de esta aplicación del modelo matemático de Brody, es el método de Runge-Kutta de orden 4, cuyo error es 0.00157130460661392; seguido del método de Adams-Basforth de orden 4, cuyo error es 0.0461217477209175. El método de Adams-Moulton de orden 4 a pesar de que su error es 0.00325012421023985, continúa presentando un comportamiento irregular y los datos obtenidos no permiten tener certeza en la estimación; el método de Heun de orden 2 es el que menor ajuste presenta y su error es 1.20484137628011. Al igual que en los casos anteriores, se observa con esta aplicación que se puede estimar el crecimiento en peso de cualquier especie, transcurrido los días o años que queramos, siempre teniendo en cuenta la expectativa de vida que tiene la especie a estimar.

Comparaciones de conclusiones

Una vez que se realizó la aplicación de los cuatro métodos numéricos a cada uno de los modelos matemáticos seleccionados, utilizando la herramienta informática MATLAB, se observa en la Tabla 14 que es el método de Runge-Kutta de orden 4 el que mejor se ajusta o aproxima a la solución analítica de cada uno de los cinco modelos; seguido del método de Adams-Basforth de orden 4, el cual solo presentó problemas al aplicarlo sobre el modelo de Gompertz, presentando un comportamiento inestable en los datos obtenidos. El método que menos se ajustó en todos los modelos es el de Heun de orden 2 y el método de Adams-Moulton de orden 4 presentó un comportamiento inestable en los datos obtenidos en todos los modelos elegidos.

Tabla 14.

Cuadro comparativo de los cálculos de los errores de la aplicación de los métodos numéricos seleccionados a la solución analítica de cada modelo en estudio.

Cuadro comparativo: Cálculo de errores Métodos numéricos aplicados a la solución analítica de los modelos seleccionados				
Número de Subintervalos (10)	Errores cometidos por método			
	Heun Orden 2	Runge-Kutta Orden 4	Adams-Basforth 4	Adams-Moulton 4
Modelo de Malthus	84.0997988920781	0.344415603494781	8.25747249176993	0.815694190598606
Modelo de Verhulst	2398734.4487921	7959.20082247257	769801.86198771	64554.5821546316
Modelo de Gompertz	1.24006532846916	0.019656584792294	0.494383342059024	0.0299676471602197
Modelo de Von Bertalanffy	0.995071839552928	0.00754898949087845	0.177373925778937	0.00874394729626715
Modelo de Brody	1.20484137628011	0.00157130460661392	0.0461217477209175	0.00325012421023985

Conclusiones

- Para el desarrollo de esta investigación se eligieron cinco modelos matemáticos, los cuales son aplicados en el área de la Biología, en lo concerniente a la dinámica de las poblaciones, que estudia el crecimiento tanto en talla como en peso de diferentes especies marinas o terrestres. El modelo de Malthus, Verhulst o logístico, Gompertz, Von Bertalanffy y Brody; estos modelos son representados con ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que tienen condiciones iniciales. Así mismo, se seleccionaron cuatro métodos numéricos que resuelven estos problemas de ecuaciones diferenciales

con condiciones iniciales. El método de Heun de orden 2, Runge-Kutta de orden 4, Adams-Basforth de orden 4 y Adams-Moulton de orden 4.

- ▶ Se aplicaron estos cuatro métodos numéricos a los cinco modelos matemáticos elegidos, para esto se tomaron en consideración investigaciones de otros autores que realizaron análisis multimodelo para estimar el crecimiento en talla o peso de varias especies marinas y/o terrestres; de estas investigaciones se tomaron los datos y los parámetros de cada modelo elegido y con la ayuda de la herramienta informática de cálculos MATLAB se obtuvieron los resultados numéricos y gráficos de cada aplicación y se determinó cuál de estos métodos numéricos es el que mejor se ajusta o aproxima a la solución analítica que tiene cada modelo.
- ▶ Dentro del contexto y estado del arte de la investigación se dio a conocer toda la información destacada referente a los cinco modelos seleccionados; una breve introducción, el planteamiento de la ecuación diferencial ordinaria y sus parámetros, el desarrollo matemático para resolver esta ecuación diferencial y obtener su solución analítica, así como su representación gráfica basada en aplicaciones reales.
- ▶ Se estudiaron además los cuatro métodos numéricos elegidos, partiendo desde el conocimiento de qué es una ecuación diferencial ordinaria y los problemas de valor inicial, hasta conocer los métodos de un paso (Heun y Runge-Kutta) y los métodos multipasos (Adams-Basforth y Adams-Moulton).
- ▶ Se obtuvieron los resultados de la aplicación de cada método numérico a la solución analítica de los diferentes modelos matemáticos en estudio; posteriormente se representaron, graficaron e interpretaron estos resultados.
- ▶ Finalmente, de toda la información y resultados obtenidos se concluye que es el método de Runge-Kutta de orden 4 el que mejor se ajusta o aproxima a la solución analítica de cada uno de los cinco modelos; seguido del método de Adams-Basforth de orden 4, el cual solo presentó problemas al aplicarlo sobre el modelo de Gompertz, presentando un comportamiento inestable en los datos obtenidos. El método que menos se ajustó en todos los modelos es el de Heun de orden dos; el método de Adams-Moulton de orden 4 presentó un comportamiento inestable en los datos obtenidos en todos los modelos elegidos.
- ▶ Esta aplicación representa una opción alternativa y demuestra la gran utilidad que tienen los métodos numéricos, los cuales ayudan a predecir entre otras cosas fenómenos naturales, con mucha eficiencia, baja inversión y sobre todo ahorrando grandes costos en simulación; que al final del día es lo que buscan las empresas, desarrolladores, emprendedores e investigadores en general.

Recomendaciones

- ▶ Entre las líneas futuras que abre este trabajo, se puede indicar el hecho de incluir en las investigaciones de análisis multimodelo realizadas por varios autores, un análisis numérico como el que aquí se presenta, de esta forma se puede complementar la investigación, eligiendo una serie de modelos matemáticos que pueden ser aplicados

a cualquier área de estudio, ajustarlos a los parámetros numéricos y estadísticos disponibles, determinar cuál es el de mejor ajuste y finalmente aplicarles métodos numéricos como una alternativa de estimación y validación de los resultados.

- ▶ Las aplicaciones realizadas en la presente investigación fueron enfocadas al área de la Biología (dinámica de las poblaciones), pero las mismas pueden ser aplicadas a cualquier otra área de estudio; seleccionando los modelos matemáticos acordes a lo que se quiera representar y aplicando a estos, los métodos numéricos aquí descritos; de esta forma se puede estimar o predecir comportamientos de cualquier índole, mejorando los resultados en las investigaciones y aportando a la comunidad científica.
- ▶ En lo que respecta a los métodos numéricos elegidos, se podría mejorar estos métodos, aumentando el orden de los mismos, esto disminuiría los márgenes de error y de esta forma se pueden obtener mejores resultados en las estimaciones. De acuerdo a los datos e información recopilada en la presente investigación al aplicar cada método numérico a cada modelo matemático, se determinó que es el método de Runge-Kutta de orden 4, el que mejor se ajustó a la solución analítica de los modelos seleccionados; lo que puede ser objeto de estudio a futuro, el trabajar con este método, mejorarlo y aumentar su orden; de esta forma tendríamos un método numérico más robusto, cuyos resultados seguramente estarían muy cercanos a la solución que se persigue.
- ▶ Esta investigación contribuye a demostrar una vez más la gran valía que tienen los métodos numéricos, cuya aplicación permite predecir fenómenos de casi todo lo que queramos y que el uso correcto de estos métodos numéricos pueden transformarse en importantes reducciones de costos en simulación, siempre recordando además el gran aporte que la tecnología nos ofrece hoy en día, el uso de programas informáticos potentes como MATLAB que se utilizó en este trabajo, que permiten la adecuada simulación y la ejecución de los métodos numéricos que se han descrito.
- ▶ Finalmente, la acertada unión de la tecnología con los desarrollos matemáticos puede derivar en líneas futuras de trabajos de investigación y el resultado de estos trabajos, se convertirán en un aporte significativo a la ciencia.

Referencias

- Aragón-Noriega, E. A. (11 de Diciembre de 2012). Modelación del crecimiento individual del callo de hacha *Atrina maura* (Bivalvia: Pinnidae) a partir de la inferencia multi modelo. *Centro de Investigaciones Biológicas del Noroeste*, pág. 8.
- Barranco, P., Pascual, F., & Cabello, T. (1999). Modelización del desarrollo postembrionario de *Dociostaurus maroccanus* (Thunberg, 1815). *Boletín de sanidad vegetal. Plagas*, Vol. 25(2), 241-254.
- Burden, R., & Faires, J. D. (2017). *Análisis Numérico 10ma. Edición*. México D.F.: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc.
- Cedron Castro, J. (15 de Junio de 2016). El Modelo de Gompertz y su aplicación en Seguridad Alimentaria. *Universidad de Valladolid - Facultad de Medicina*, pág. 43.

- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Métodos Numéricos para Ingenieros 7ma. Edición*. México D.F.: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.
- Chiappa Carrara, X., Galindo de Santiago, M., & Cervantes Sandoval, A. (2009). Introducción a los modelos matemáticos de crecimiento con aplicaciones en sistemas biológicos. *Universidad Nacional Autónoma de México*, pág. 158.
- Cortés López, J., Romero Bauset, J., Roselló Ferragud, M., & Villanueva Micó, R. (09 de Julio de 2013). Modelos continuos de crecimiento: del modelo exponencial al modelo logístico. *Universidad Politécnica de Valencia*, pág. 11.
- Csirke B., J. (1989). *Introducción a la dinámica de poblaciones de peces*. Roma : Servicio de Recursos Marinos - Dirección de Ambientes y Recursos Pesqueros - Departamento de Pesca - FAO.
- Ditz, Y. (2015). Modelos matemáticos para problemas en biología: población y competición entre el cáncer y el sistema inmune. *Universidad Nacional de La Pampa - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales*, pág. 23.
- Espinosa Herrera, E. J., Canals Navarrete, I., Muñoz Maya, I., Pérez Flores, R., Prado Pérez, C., Santiago Acosta, R., & Ulín Jiménez, C. (2010). Ecuaciones Diferenciales. En *Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Azcapotzalco* (págs. 133-136). Ciudad de México: Reverté.
- González, Á., Mendoza, J., Arocha, F., & Marquez, A. (Enero - Junio 2019). Análisis multimodelo del crecimiento de *Pseudoplatystoma orinocoense* en la cuenca media del Orinoco, Venezuela. *Biotecnología en el sector agropecuario y agroindustrial*, Vol. 17 No 1 (ISSN - 1692-3561 · ISSN-e 1909-9959), 1-9.
- Hidalgo de la Toba, J. Á. (2015). *Crecimiento individual de la Almeja Panopea Generosa en su límite sur de distribución: Aplicación de la teoría de Modelos Múltiples*. La Paz, Baja California Sur: Centro de Investigaciones Biológicas del Noroeste, S.C.
- Jiménez, R. (01 de Septiembre de 1997). Algunos modelos matemáticos elementales en biología. *Departamento Matemáticas - Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Universidad de Concepción*, pág. 13.
- Ladino Martínez, L. (2012). Modelos de dinámica de poblaciones migratorias con factores de reclutamiento, depredación y captura. *Universidad de Castilla - La Mancha*, pág. 159.
- Malhado, C., Ramos, A., Carneiro, P., Souza, J., Wechsler, F., Eler, J., Azevêdo, D., & Sereno, J. (2008). Modelos no lineales para describir el crecimiento de Bufalinos de la raza Murrah. *Archivos de zootecnia*, vol. 57(220), 497-503.
- May Cen, I. (2016). Modelos de Dinámica Poblacional en Ecología. *Revista del Centro de Graduados e Investigación - Instituto Tecnológico de Mérida*, Vol. 32(60 ISSN 0185-6294), 50-55.
- Mínguez, F. S. (01 de Septiembre de 2016). Procesos de difusión Logístico y Gompertz. Métodos numéricos clásicos en la estimación paramétrica. *Universidad de Granada - Departamento de Estadística e Investigación Operativa*, pág. 85.

- Mora Delgado, J. (2018). Aplicación de modelos matemáticos no lineales para la estimación de parámetros de crecimiento de *Alnus acuminata* en sistemas silvopastoriles de Roncesvalles, Tolima. *Árboles y arbustos para silvopasturas: uso, calidad y alometría*(123), 124-136.
- Ortiz Laso, Z. (01 de Enero de 2016). Modelos de crecimiento de poblaciones con EDO. *Universidad de Cantabria - Facultad de Ciencias*, pág. 54.
- Parra, E., Gordillo, W., & Pinzón, W. (2019). Modelos de Crecimiento Poblacional: Enseñanza-Aprendizaje desde las Ecuaciones Recursivas. *Formación Universitaria*, Vol. 12(1)(25-34 (2019)), 10.
- San Cristóbal Mateo, J. (01 de Junio de 2004). Metodologías para el análisis económico del sector pesquero: Una aplicación a Cantabria. *Universidad de Cantabria - Departamento de Ciencias y Técnicas de la Navegación y de la Construcción Naval*, pág. 350.
- Trinidad Bello, A. (10 de Junio de 2014). Modelos de Crecimiento en Biología, su significado biológico y selección del modelo por su ajuste. *Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa - División de Ciencias Básicas e Ingenierías*, pág. 114.
- Ulloa Ibarra, J., & Rodríguez Carrillo, J. (2010). El modelo logístico: Una alternativa para el estudio del crecimiento poblacional de organismos. *REDVET. Revista Electrónica de Veterinaria*, vol. 11(3), 1-12.
- Ulloa Ibarra, J., Arrieta Vera, J., & Espino Flores, G. (2013). El Modelo Logístico y su deconstrucción. *Universidad Autónoma de Nayarit - Universidad Autonoma de Guerrero*, págs. 717-724.
- Ulloa Ibarra, J., Grijalva Díaz, F., Arrieta Vera, J., & Ortega Arcega, M. (14 de Octubre de 2017). Tratamiento del modelo de Richards. *Universidad Autónoma de Nayarit - Universidad Autónoma de Guerrero*, pág. 9.